Outils mathématiques pour la physique et la S.I.

Ce document de travail reprend un certain nombre d'outils mathématiques vus au lycée, qui vous seront utiles en physique-chimie et en sciences de l'ingénieur (et en mathématiques, bien entendu).

L'idée est que vous vous y atteliez quelques temps avant la rentrée en PTSI, à raison de 1 heure à 2 heures par jour, selon le rythme qui vous convient. Le tout devrait vous prendre une douzaine d'heures au grand maximum (soit 2 heures max par chapitre).

Sur chaque chapitre, vous devez :

- travailler l'exemple (ou les exemples) introductif(s) ;
- bien relire (et assimiler) la courte synthèse et éventuellement les méthodes associées ;
- chercher les exercices d'application (niveau indiqué : de (*) facile à (***) difficile).

Vous verrez que, si vous êtes à l'aise avec ces notions, le début d'année de PTSI vous paraîtra beaucoup plus abordable!

Une dernière chose : vous allez remarquer que, en physique et en sciences de l'ingénieur, on utilise souvent des paramètres (des lettres), beaucoup plus que des nombres. Il va falloir apprendre à manipuler et résoudre des équations littérales (= avec des lettres), et obtenir une formule littérale ***AVANT*** de chercher à faire une quelconque application numérique. Nous détaillerons dans l'année l'intérêt d'une telle approche.

Il n'y a **aucune notion de physique ou de sciences de l'ingénieur à connaître** pour pouvoir comprendre et effectuer les exercices. **Toutes les lois ou équations nécessaires sont rappelées** et expliquées dans l'énoncé. Le but de ces exercices est uniquement de **vous entraîner au calcul**, et au raisonnement mathématique appliqué aux sciences physiques et de l'ingénieur.

Sommaire

1 Manipulations de fractions et d'équations simples

Exemple introductif

On considère, dans un circuit électrique, deux résistances R_1 et R_2 mises en parallèle l'une de l'autre . Dans ce cas, on peut montrer qu'elles sont équivalentes à 1 seule résistance R qui vérifie : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$

Toutes les résistances doivent être exprimées dans la même unité, en l'occurrence l'Ohm (symbole Ω).

1 - Mettre le terme de droite au même dénominateur.

2 - En déduire l'expression de R en fonction de R_1 et R_2.

3 - Remplir le tableau de valeurs suivant, en fonction des valeurs des résistances R_1 et R_2. Inutile de donner le résultat avec plus de trois chiffres significatifs !

R_1 (en Ω)	100	200	300	200	200	200	200
R_2 (en Ω)	100	100	100	200	1000	2000	4000
R (en Ω)							

4 - Que constatez-vous, dans tous les cas, concernant la valeur de R, par rapport aux valeurs de R_1 et R_2 ?

5 - Si les deux résistances ont la même valeur, que vaut la résistance équivalente ?

Synthèse de cours

• **Pour résoudre une équation**, commencer par **identifier la variable** (celle dont on cherche à obtenir la solution : R dans l'exemple ci-dessus) et les paramètres (les grandeurs, constantes, en fonction desquelles on cherche à exprimer la variable: R_1 et R_2 dans l'exemple précédent).

Le calcul est terminé uniquement quand vous avez **obtenu une expression de la forme** :

$\boxed{\text{"variable"} = \text{"expression en fonction des paramètres"}}$ (ici : R en fonction de R_1 et R_2).

Vous **encadrez le résultat de ce calcul littéral *AVANT*** de chercher à faire l'application numérique.

Ici, on a obtenu : $\boxed{R = \dfrac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}}$

Vous noterez que la variable dont on cherche l'expression ne se note pas forcément x, contrairement à ce qui se fait souvent en mathématiques !

• **Remarque concernant les fractions :**

Attention : si une variable x vérifie, en fonction de deux paramètres a et b : $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$
alors **on n'a PAS** $x = a + b$!!!

Vous pouvez vous en convaincre en prenant $a = 2$ et $b = 3$:

$\hookrightarrow$ si x vérifie $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}$: que donne $1/x$? et que vaut donc x ?

$\hookrightarrow$ et si on calcule directement $a + b$, obtient-on la même valeur de x ?

Ex. 1 - Equations archi-simples (*)

Résoudre les équations suivantes (c-à-d exprimer x en fonction des paramètres, avec a, b, et $c > 0$) :

(1) : $a\,x + b = c$ (2) : $\dfrac{a}{x+b} = c$ (3) : $a\,x + b - \dfrac{c}{x} = 0$

Ex. 2 - Loi des mailles dans un circuit électrique (**)

On considère un circuit électrique très simple, constitué d'un générateur et de deux résistances placées en série. Le générateur délivre une tension constante $E = 10,0\,\mathrm{V}$. La première résistance a une valeur constante $R = 100\,\Omega$. On ne connaît pas la valeur de la deuxième résistance R'.

Un voltmètre placé en parallèle de la résistance inconnue R' indique que la tension à ses bornes vaut : $U' = 2,0\,\mathrm{V}$. On note U la tension aux bornes de la résistance R. On ne mesure pas sa valeur.

On ne connaît pas non plus la valeur de l'intensité I du courant qui circule dans ce circuit. On rappelle qu'une intensité électrique s'exprime en Ampère (symbole : A). On précise aussi que l'intensité I du courant est la même, partout dans ce circuit (car tous les éléments sont en série).

L'application de la loi des mailles sur ce circuit permet de relier les tensions entre elles : $E = U + U'$ (équation E1).

1 - Exprimer U en fonction de E et U'. En déduire la valeur de U.

2 - Pour une résistance R parcourue par un courant d'intensité I, la tension à ses bornes est donnée par la loi d'Ohm : $U = R\,I$ (équation E2).

2.1 - Dans un premier temps, exprimer I en fonction de U et R, et en déduire sa valeur.

2.2 - Désormais, donner l'expression reliant directement I aux grandeurs mesurées, à savoir E, U' et R. Calculer sa valeur, et vérifier qu'on obtient bien la même.

3 - Enfin, on peut appliquer la loi d'Ohm à la résistance R', ce qui donne : $U' = R'\,I$ (équation E3).

3.1 - En déduire l'expression de la résistance R' (en fonction de U' et I) et sa valeur.

3.2 - En utilisant d'une part la loi des mailles (équation E1) et les deux lois d'Ohm (équations E2 et E3), obtenir la relation reliant E, R, R' et I. Montrer qu'on obtient : $I = \dfrac{E}{R + R'}$

3.3 - En déduire par calcul direct la valeur du courant I, en admettant que $R' = 25\,\Omega$ (et toujours avec $R = 100\,\Omega$). Comparer aux valeurs précédemment obtenues.

Ex. 3 - Relation de Descartes (***)

On considère une lentille optique, de distance focale notée f'. Cette grandeur caractérise la lentille. Elle a une valeur donnée, pour une lentille donnée. On a $f' > 0$ pour une lentille convergente, qui est le cas que l'on considèrera ici.

Quand on place un objet en A avant une lentille (la lentille étant placée au point O), on peut obtenir une image au point A' après la lentille. On peut mesurer les distances suivantes : $x = OA$ distance entre l'objet et la lentille et $x' = OA'$ distance entre la lentille et l'image.

Ces distances sont reliées par la relation de Descartes : $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f'}$

Dans cette relation, toutes les grandeurs (x, x' et f') doivent être données dans la même unité : le mètre (m) par exemple (mais elles peuvent aussi être toutes en cm !).

On précise que **l'on prendra toujours** $x > f'$.

1 - En déduire la relation qui donne x' en fonction de x et f'.

2 - On prend une lentille de distance focale $f' = 200\,\mathrm{mm}$. On mesure $x = 30\,\mathrm{cm}$ la distance objet – lentille. En déduire la valeur numérique de la distance lentille – image x'.

3 - Montrer que la relation obtenue au **1** peut aussi s'écrire : $x' = \dfrac{f'}{1 - \dfrac{f'}{x}}$.

Dès lors, si la distance x entre l'objet et la lentille augmente (on éloigne progressivement l'objet de la lentille), comment variera la distance x' entre la lentille et l'image ?

4 - On cherche la position de l'objet telle que la distance x objet – lentille soit la même que la distance x' lentille – écran. On doit donc avoir : $x = x' = \dfrac{x\,f'}{x - f'}$.

4.1 - Résoudre cette équation, pour obtenir l'expression de x en fonction de f'.

On précise que la solution $x = 0$ n'est pas envisageable physiquement.

4.2 - Que vaut alors la distance AA', entre l'objet et son image ? Un petit schéma pourra aider à répondre à cette question.

2 Manipulations de fonctions : dérivation, intégration

Exemple introductif

De nombreux phénomènes physiques (ou chimiques) obéissent à des lois de décroissance exponentielle. On observera alors une grandeur dont la dépendance s'écrit : $f(x) = a\,e^{-x}$ où a est un paramètre, constant.

1 - Comment s'exprime la dérivée $f'(x)$ de cette fonction ?

2 - Comment s'exprime la primitive $F(x)$ de cette fonction ?

Synthèse de cours

Il faut absolument connaître les dérivées et les primitives des fonctions usuelles. Les tableaux ci-dessous se lisent dans les deux sens : fonction $\rightsquigarrow$ dérivée de la gauche vers la droite ; fonction $\rightsquigarrow$ primitive de la droite vers la gauche.

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
constante a	0
$a\,x+b$	a
$a\,x^2+b\,x+c$	$2a\,x+b$
$x^n \quad (n\in\mathbb{N})$	$n\,x^{n-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\dfrac{1}{x^n}=x^{-n} \quad (n\in\mathbb{N})$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}=-n\,x^{-n-1}$
Primitive $G(x)$	**Fonction** $g(x)$

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
$\sqrt{x}=x^{1/2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\,x^{-1/2}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$
Primitive $G(x)$	**Fonction** $g(x)$

Il faut aussi savoir dériver une fonction composée quelconque. En voici quelques exemples :

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
$a\cdot u(x)+b\cdot v(x)$	$a\cdot u'(x)+b\cdot v'(x)$
$u(x)\cdot v(x)$	$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$
$\dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$
$u^n(x)\ (n\in\mathbb{N})$	$nu'(x)\cdot u^{n-1}(x)$
Primitive $G(t)$	**Fonction** $g(t)$

Fonction $f(x)$	**Dérivée** $f'(x)$
$u\circ f(x)=u(f(x))$	$f'(x)\cdot u'(f(x))$
$u(a\,x+b)$	$a\cdot u'(a\,x+b)$
$\exp\left(f(x)\right)$	$f'(x)\cdot\exp\left(f(x)\right)$
$\cos\left(f(x)\right)$	$-f'(x)\cdot\sin\left(f(x)\right)$
$\ln\left(\cos(x)\right)$	$-\sin(x)\,\dfrac{1}{\cos(x)}$
Primitive $G(t)$	**Fonction** $g(t)$

Ex. 1 - Décroissance exponentielle encore (*)

Quand le phénomène que l'on observe évolue dans le temps, on note plutôt sa loi d'évolution en fonction de la variable t. Par exemple, la décharge d'un condensateur dans une résistance se traduit par une tension qui évolue selon l'équation: $u(t) = U_0\, e^{-t/\tau}$. Dans cette équation, U_0 et τ sont des paramètres, constants.

1 - Que vaut la fonction $u(t)$ à l'instant $t = 0$? Que représente donc, à votre avis, le paramètre U_0 ?

2 - Comment s'exprime la dérivée temporelle de la fonction $u(t)$?

3 - Comment s'exprime la primitive temporelle de la fonction $u(t)$?

Ex. 2 - Lois de force (**)

1 - La force d'interaction gravitationnelle exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 s'exprime comme : $f(x) = -\dfrac{G\, m_1\, m_2}{x^2}$ où x est la distance séparant les deux masses, et G la constante universelle de la gravitation.

1.1 - Exprimer la dérivée $f'(x)$ de la force (en fonction de G, m_1, m_2 et x).

1.2 - On dit qu'une telle force "dérive d'une énergie potentielle", c'est-à-dire qu'il existe une fonction énergie potentielle $E(x)$ qui est l'opposée de la primitive de cette force.
C'est-à-dire que l'on peut écrire : $E(x) = -\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire l'expression de cette fonction $E(x)$.

2 - Un ressort exerce sur une petite masse une force qui s'exprime comme $f(x) = -k\,x$ où k est un paramètre, constant. On cherche l'énergie potentielle associée, $E(x)$ qui vérifie, comme précédemment : $E'(x) = -f(x)$.

▷ Exprimer la fonction $E(x)$ en fonction de k et x.

3 - Si on considère deux grosses molécules de diiode (I_2) proches l'une de l'autre dans un solvant, chacune exerce sur l'autre une interaction dite dipolaire, dont l'énergie potentielle s'écrit : $E(d) = -\dfrac{\alpha}{d^6}$ où α est une constante et d la distance qui sépare les deux molécules. Comme précédemment, on définit la force dipolaire f associée à cette énergie comme l'opposé de la dérivée de la fonction $E(d)$.

3.1 - Donner l'expression de la force d'interaction dipolaire $f(d)$, en fonction de la distance d qui sépare les deux molécules (et de la constante α).

3.2 - Si, à cause d'un autre phénomène physique, l'énergie totale d'une molécule s'écrit désormais comme : $E(d) = -\dfrac{\beta}{d^4} - \dfrac{\alpha}{d^6}$, quelle est désormais l'expression de la force totale ressentie par la molécule ? (La force totale étant toujours donnée par : $f(d) = -E'(d)$)

Ex. 3 - Fonction de transfert d'un filtre passe-bas ou passe-haut (**)

L'étude de circuits électriques contenant une résistance et un condensateur, ou une résistance et une bobine, peut mener à l'obtention de la fonction dite *fonction de transfert* du circuit. Elle peut prendre, pour des circuits simples, l'une des deux formes suivantes : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ou $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1 - Exprimer la dérivée de chacune des fonctions : $f'(x)$ et $g'(x)$.

2 - x ne peut prendre que des valeurs positives ou nulle. Que peut-on dire du signe de $f'(x)$? et de celui de $g'(x)$?

3 Etude des fonctions sinusoïdales : cos et sin

Exemple introductif

L'étude des signaux sinusoïdaux est courante en physique et en SI. Que ce soit en électricité, en mécanique, en optique, ou autres, on rencontre souvent des grandeurs qui varient suivant une loi du type : $f(x) = A\cos(x)$ où A est une constante.

1 - Représenter la fonction $f(x)$, pour $x > 0$.

2 - Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles f est maximale ? Minimale ? Comment s'expriment ces maximums et ces minimums ?

3 - Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles f est nulle ?

4 - Reprendre les mêmes questions si cette fois-ci la fonction est : $g(x) = B\sin(x)$ (où B =cste).

Synthèse de cours

• Connaître sans hésiter les relations dans un triangle rectangle, utiles pour projeter des vecteurs :

$$\cos\theta = \frac{\text{cote adj.}}{\text{hypoth.}} \qquad \sin\theta = \frac{\text{cote opp.}}{\text{hypoth.}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cote opp.}}{\text{cote adj.}} = \frac{1}{\text{cotan}\theta}$$

• Entraînez-vous à tracer à main levée les fonctions sinus et cosinus.

• Retenez les valeurs particulières :

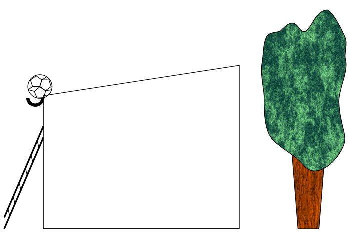
θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

• Entraînez-vous à lire les valeurs du sinus ou du cosinus d'un angle sur un cercle trigonométrique.

Retenez ou sachez retrouver les relations :

$$\begin{aligned} \cos(\pi - \theta) &= -\cos\theta & \cos(\pi/2 - \theta) &= +\sin\theta \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos\theta & \cos(\pi/2 + \theta) &= -\sin\theta \\ \sin(\pi - \theta) &= +\sin\theta & \sin(\pi/2 - \theta) &= +\cos\theta \\ \sin(\pi + \theta) &= -\sin\theta & \sin(\pi/2 + \theta) &= +\cos\theta \end{aligned}$$

Ex. 1 - Kylian et son ballon (*)



Encore endormi, Kylian a mal visé : son ballon s'est retrouvé bloqué par la gouttière d'un petit bâtiment. Prêt à tout pour récupérer son ballon, il saisit une échelle de 3,00 m de haut. Kylian mesure 2,40 m le bras levé. Il incline l'échelle de 15°par rapport à la verticale. Le sol est supposé plat et mur du bâtiment bien perpendiculaire au sol. Il monte jusqu'au dernier barreau de l'échelle, et tend le bras pour essayer d'attraper le ballon.

1. La gouttière étant à 5,50 m du sol, peut-il l'atteindre ? Si non, quelle longueur lui manque-t-il (à 0,10 m près)?

2. Abandonnant la piste de l'échelle, il décide de grimper sur l'arbre de l'autre côté du bâtiment (qui a la forme indiquée sur le schéma). A quelle hauteur (à 10^{-1} m près) va-t-il grimper pour atteindre le toit, sachant que le toit du bâtiment est incliné à 10°par rapport à l'horizontale, et que la longueur du bâtiment vaut 6 m?

Ex. 2 - Signaux temporels sinusoïdaux (**)

Pour un signal variable sinusoïdalement dans le temps, par exemple une tension, on l'écrit sous la forme : $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. On appelle ω la pulsation du signal, qui est une constante. U_0 est une autre constante ($U_0 > 0$), appelée amplitude du signal.

1 - Pour quelles valeurs du groupement (ωt) le signal $u(t)$ est-il maximal ? Mis à part $t = 0$, quelle est donc la première valeur de $t > 0$ pour laquelle le signal redevient maximal ? On appelle cette valeur la période du signal, et on la note T. Exprimer alors T en fonction de ω.

2 - Que vaut le signal $u(t)$ pour $t = T/4$? pour $t = T/2$? pour $t = 3T/4$? pour $t = 3T/2$? Pour $t = 2T$?

3 - Représenter alors le signal $u(t)$, en indiquant les valeurs particulières de t pour lesquelles le signal est maximal, nul ou minimal.

4 - En reprenant la même étude pour la fonction $v(t) = U_0 \sin(\omega t)$, la représenter sur le même graphique .

5 - Que vaut l'une des deux fonctions (u ou v) quand l'autre est maximale ou minimale ?

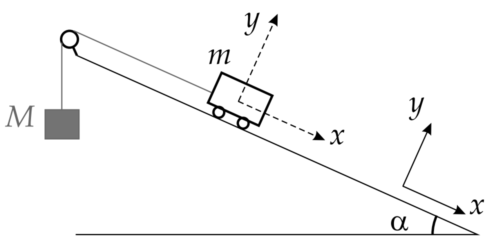
On prend le cas où $U_0 = 1$ (dans l'unité appropriée, des Volts par exemple si u et v sont des tensions). On considère un point M dont les coordonnées dans le plan seront $(x = u; y = v)$.

6 - Positionner ce point M pour les valeurs de t suivantes (prendre le temps de calculer les coordonnées de chaque point) :

$t = 0$	$t = T/8$	$t = T/4$	$t = 3T/8$	$t = T/2$	$t = 3T/4$	$t = T$

Que décrit le point M ? En combien de temps fait-il un tour complet ?

Ex. 3 - Equilibre de forces (**)



Un chariot de masse m est en équilibre sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = \pi/6$ avec l'horizontale. Il est retenu par un câble en acier parallèle à la pente. En haut de la pente, le câble s'enroule autour d'une poulie ; à l'autre bout du câble est suspendue, dans le vide, une masse $M = 50\,\text{kg}$. La tension dans le câble vaut alors partout $T = M\,g$.

On rappelle que les forces auxquelles sera soumis le chariot sont : son poids (vertical, de norme $P = m\,g$ et dirigé vers le bas), la tension du câble (de norme T, portée par le câble, dirigée vers le haut de la pente) et la réaction normale (de norme R inconnue a priori, perpendiculaire à la pente, dirigée vers le haut).

On prendra $g = 10\,\text{m.s}^{-2}$

1 - Faire un schéma des forces qui s'exercent sur le chariot.

2 - Projeter ces forces, sur les deux axes perpendiculaires (Ox) et (Oy) indiqués sur le schéma ci-dessus (après avoir bien indiqué sur votre schéma les angles qui entrent en jeu).

Le chariot est immobile : selon le principe fondamental de la statique, on aura alors : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$ (Attention : ceci est une équation vectorielle! Elle doit donc être vérifiée par chacune des composantes des vecteurs entrant en jeu.)

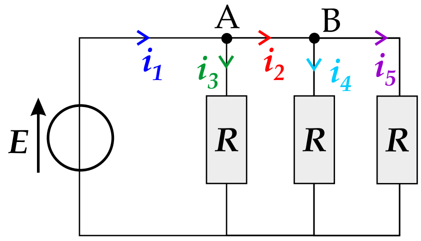
3 - Grâce aux projections des forces, on obtient un système de deux équations. En utilisant une des deux équations, en déduire l'expression de la norme de la réaction normale R en fonction de m et α.

4 - Puis obtenir grâce à l'autre équation l'expression reliant m, M et α. En déduire l'expression de m en fonction de M et α, et calculer sa valeur numérique.

4 Résolution d'un système de 2 ou 3 équations à 2 ou 3 inconnues

Exemple introductif

Dans un circuit électrique quelconque, où circule un courant continu (= d'intensité constante dans le temps), une des lois qui est toujours vérifiée est la loi des noeuds : la somme des courants entrants dans un nœud donné est nulle (ou la somme des courants entrants est égale à la somme des courants sortants).



Sur l'exemple ci-contre, où on a noté i_1, i_2, i_3, i_4 et i_5 les intensités des courants dans les différentes branches, on a donc :

↪ au nœud A : $i_1 = i_2 + i_3$ (équation E1)

↪ au nœud B : $i_2 = i_4 + i_5$ (équation E2)

Par ailleurs, des arguments de symétrie permettent de prévoir que $i_3 = i_4 = i_5$.
Grâce à un ampèremètre, on mesure $i_1 = 1\,\text{A}$

1 - Poser les deux équations (E1) et (E2) l'une sous l'autre, en ne faisant plus intervenir que les inconnues : i_2 et i_3 ainsi que le paramètre connu i_1.

2 - Remplacer dans (E1) i_2 par son expression en fonction de i_3 (en utilisant (E2)). Obtenir ainsi l'équation donnant i_3 en fonction de i_1. Calculer sa valeur numérique.

3 - En déduire finalement l'expression de i_2 en fonction de i_1, puis la valeur numérique de i_2.

4 - En déduire finalement les valeurs de i_4 et i_5.

Synthèse de cours

• Souvent l'étude de systèmes physiques mène à l'obtention d'un ensemble de plusieurs équations à plusieurs inconnues, du type : $\begin{cases} a\,x + b\,y = c & (E1) \\ d\,x + f\,y = h & (E2) \end{cases}$

Ces équations sont donc liées les unes aux autres, par le biais des inconnues (x et y ici) qui y interviennent.

Les paramètres a, b, c, d, f et h sont des constantes (on peut connaître leur valeur numérique, ou les laisser sous forme de paramètres littéraux).

• Pour résoudre un tel système, il existe plusieurs méthodes, certaines plus efficaces que d'autres. La plus simple consiste à **remplacer une inconnue par une autre, en utilisant une des équations**.

Par exemple, ici dans $(E1)$, on peut écrire : $y = \dfrac{c - a\,x}{b}$ $(*)$

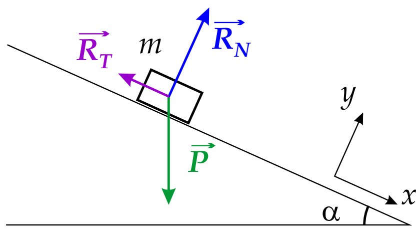
Puis, **on injecte ce résultat dans l'autre équation**. Ici, dans $(E2)$, cela donne :

$$d\,x + f\,\frac{c - a\,x}{b} = h \quad \Rightarrow \quad \left(d - f\,\frac{a}{b}\right) x = h - f\,\frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h - f\,\frac{c}{b}}{d - f\,\frac{a}{b}} = \frac{b\,h - c\,f}{b\,d - a\,f}$$

• Le résultat obtenu ici est une grosse équation qui peut faire peur, mais calculer x si on connaît les valeurs numériques des 6 paramètres (a, b, c, d, f et h) n'est pas particulièrement compliqué !

Enfin, on reprend $(*)$ pour obtenir l'expression de y. On trouve finalement : $y = \dfrac{c\,d - a\,h}{b\,d - a\,f}$
(après développement et simplification). On peut, de même, calculer sa valeur numérique si nécessaire.

Ex. 1 - Forces sur un palet (*)



On considère un palet de masse m, posé sur un plan incliné. On suppose qu'il existe un frottement (appelé frottement solide) entre le palet et le support, qui permet au palet de rester immobile. Comme indiqué sur la figure, les forces qui interviennent sont $\overrightarrow{P}$ (poids), $\overrightarrow{R}_N$ (réaction normale du support) et $\overrightarrow{R}_T$ (force de frottement due au support). Ainsi, l'application du principe fondamental de la statique, projeté sur les axes (x, y) portés sur la figure, mène au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} R_N - m\,g\,\cos\alpha = 0 & (E1) \\ m\,g\,\sin\alpha - R_T = 0 & (E2) \end{cases}$$

où g désigne l'accélération de la pesanteur (constante).

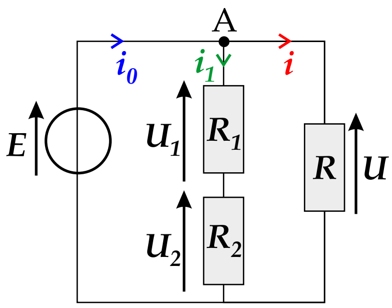
1 - En déduire l'expression de R_N et de R_T en fonction de m, g et α.

En fait, d'après la loi du frottement de glissement, le palet ne peut rester immobile que si R_T et R_N vérifient la relation suivante : $R_T < f\,R_N$ où f le coefficient de frottement statique sur le support (c'est une constante).

2 - Déduire des relations obtenues précédemment la condition sur l'angle α et le coefficient f pour que le palet puisse rester immobile.

3 - Le coefficient f entre un palet en bois poli et un support en métal vaut $f = 0,25$. On prend $\alpha = 10\,\text{deg}$: le palet restera-t-il immobile ? Et pour $\alpha = 20\,\text{deg}$?

Ex. 2 - Etude d'un circuit (**)



On cherche à étudier le circuit ci-contre, c'est-à-dire à déterminer l'expression de tous les courants et de toutes les tensions, en fonction des paramètres connus, à savoir E, R, R_1 et R_2.

En plus de la loi des nœuds évoquée dans l'exemple introductif, on utilisera

↪ la loi des mailles : la somme des tensions sur une maille est nulle (toutes les tensions devant être prises dans le même sens).

↪ la loi d'Ohm qui relie tension aux bornes d'une résistance et courant traversant celle-ci.

On aura donc, sur le circuit ci-contre, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} i_0 = i_1 + i & (E1) \\ E = U_1 + U_2 & (E2) \\ U_1 + U_2 - U = 0 & (E3) \end{cases}$$

Et on aura en plus les relations : $U = R\,i$ et $U_1 = R_1\,i_1$ et $U_2 = R_2\,i_1$

1 - Utiliser $(E2)$ et $(E3)$ pour obtenir la relation simple reliant E à U. On appellera $(E3')$ cette nouvelle équation.

2 - Remplacer dans chacune des équations les tensions U, U_1 et U_2 par leurs expressions en fonction des courants en utilisant les 3 dernières relations fournies.

3 - Déduire de $(E2)$ ainsi réécrite l'expression de i_1 en fonction de E, R_1 et R_2.

4 - Déduire, de même, de $(E3')$ ainsi réécrite l'expression de i en fonction de E et R.

5 - Enfin, injecter ces relations dans $(E1)$ afin d'obtenir l'expression de i_0 en fonction de E, R, R_1 et R_2.

5 Recherche de l'extrémum d'une fonction (maximum ou minimum)

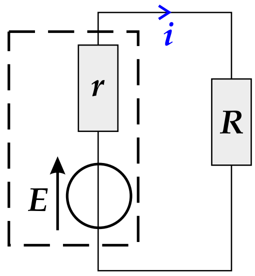
Exemple introductif

Dans le très simple circuit électrique ci-contre, on cherche la condition à laquelle la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R sera maximale.

Cette puissance s'écrit de la façon suivante : $\mathcal{P}_J = R\,\dfrac{E^2}{(r+R)^2}$.

Pour simplifier la recherche, et se rapprocher des expressions utilisées en mathématiques, on écrira cette fonction sous la forme : $f(x) = \dfrac{x}{(r+x)^2}\,E^2$

(x désigne la résistance R, et ne peut donc prendre que des valeurs positives ici).
Dans cette expression, E et r sont des paramètres, qui ne peuvent pas être modifiés.



1 - Comment trouver, mathématiquement, la valeur (ou plutôt l'expression ici) de x pour laquelle la fonction $f(x)$ est extrémale ? Ecrire cette condition.

2 - On admettra que cet extrémum est bien un maximum . Montrer alors que f est maximale pour $x = r$.

3 - Exprimer alors la fonction f en $x = r$.

Synthèse de cours

• Pour trouver les extrémums (maximum ou minimum) d'une fonction, il faut calculer sa dérivée, et chercher les points auxquels cette dérivée s'annule.

Souvent, en physique, la dérivée ne s'annulera qu'en un seul point. Par ailleurs, on s'épargnera, autant que possible, le tracé de tout le tableau de variations de la fonction, en "rusant" un peu. Par exemple, si l'extrémum est obtenu en $x = x_0$, et qu'on remarque que la fonction est croissante pour des valeurs de $x < x_0$, on en déduira que x_0 correspond à un maximum de la fonction.

• Parfois, la fonction dont on cherche les éventuels extrémums est du type : $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ avec $g(x)$ une fonction qui ne peut jamais s'annuler ($g(x)$ sera toujours strictement positif par exemple).
Dans un tel cas, plutôt que de dériver la fonction f (dérivation d'un quotient), il suffira de dériver la fonction g : en effet, si g est maximale alors f sera minimale (et inversement).

Ex. 1 - Trajectoire parabolique (*)

Un objet ponctuel, lancé dans le champ de pesanteur (d'intensité g constante) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle α par rapport à l'horizontale adopte une trajectoire parabolique d'équation :

$$y(x) = -\frac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2\alpha}\,x^2 + \tan\alpha\,x$$

(y désigne l'altitude du point, et x sa position projetée sur la direction horizontale).

1 - Chercher l'expression de la position x à laquelle le point atteint l'altitude maximale de sa trajectoire.

2 - En déduire l'expression de cette altitude maximale, $y_{\max}$, en fonction de v_0, g et α.

3 - Pour une norme de vitesse v_0 donnée, quelle valeur de l'angle α faut-il choisir pour que l'altitude $y_{\max}$ soit la plus élevée possible ? Que vaut-elle alors ?

Ex. 2 - Distance minimale entre un objet et son image par une lentille (**)

On reprend le cas de l'exercice **2** du **chapitre 1**, où on considère l'image A' d'un point A par une lentille convergente. La distance entre objet et image s'écrit : $AA' = x + x'$ où $x' = \dfrac{x\,f'}{x - f'}$.

Dans ces expressions, on rappelle que f' est un paramètre constant (la distance focale de la lentille) et x la distance objet – lentille, qui peut être modifiée.

1 - Obtenir l'expression de la distance objet – image AA' en fonction de x et de f'. On pourra noter $g(x)$ cette fonction.

2 - Chercher les valeurs de x pour lesquelles g est extrémale. La valeur $x = 0$ n'est physiquement pas envisageable (objet confondu avec la lentille) : c'est donc l'autre solution qu'il faut conserver.

3 - Que vaut alors la fonction g pour cet x ?

Ex. 3 - Maximum de la réponse en tension dans un circuit : résonance (***)

Dans certains circuits électriques contenant condensateurs et bobines, on peut observer des phénomènes dits de "résonance" : la tension aux bornes d'un des composants du circuit peut devenir très grande (supérieure à la tension fournie par le générateur).

Pour savoir si un tel phénomène peut se produire, on doit étudier la *fonction de transfert du circuit.* On donne par la suite la fonction de transfert de deux circuits différents, et on va chercher si la fonction de transfert peut admettre un maximum : on dira alors qu'il y a résonance.

Dans ces deux circuits, le paramètre Q désigne le facteur de qualité, constante positive qui dépend essentiellement des résistances présentes. On précise que la variable x ne peut prendre que des valeurs positives.

A - Premier circuit Dans un premier circuit, la fonction de transfert s'écrit : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

1 - Pour chercher si $f(x)$ admet un maximum, il suffit de chercher si la fonction au dénominateur (dans la racine) admet un minimum. Chercher, donc, si la fonction $g(x) = 1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$ admet un minimum, et si oui pour quelle valeur de x.

2 - Quelle est la valeur de la fonction f à son maximum ? Dépend-elle du facteur de qualité Q du circuit ?

B - Second circuit Dans un second circuit, la fonction de transfert s'écrit : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}}}$

3 - En utilisant la même astuce que précédemment, on va chercher si la fonction $g(x) = (1 - x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$ admet un minimum. Montrer que $g(x)$ n'admet de minimum autre que $x = 0$ que si $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, et si oui pour quelle valeur de x.

4 - Si cette condition est vérifiée, quelle est la valeur de x correspondante ? Et quelle est la valeur de la fonction f à son maximum ? Dépend-elle du facteur de qualité Q du circuit ?

6 Recherche de limites et tracé de graphes

Exemple introductif

On reprend l'exemple introductif du chapitre précédent.
On cherche à tracer la courbe représentant la fonction $f(x) = \dfrac{x}{(r+x)^2}\,E^2$.

1 - Que vaut la fonction f en $x = 0$?

2 - A la limite où $x \to +\infty$, quel est le terme dominant au dénominateur ? Si on garde au dénominateur uniquement ce terme dominant (et si on ne modifie pas l'expression du dénominateur), que devient alors l'expression de la fonction f ? Quelle sera sa limite en $x \to +\infty$?

3 - Enfin, comme on ne cherche à faire l'étude de f que pour des valeurs positives de x, que peut-on dire du signe de $f(x)$?

4 - On a montré au chapitre précédent que la fonction f admet un maximum en $x = r$, et ce maximum est : $f(r) = \dfrac{E^2}{4\,r}$. Placer, sur un graphe, les deux points par lesquels le graphe de la fonction f devra passer : $f(0)$, $f(r)$ et indiquer sa limite en $x \to +\infty$.

5 - Enfin, pour savoir comment "démarre" la fonction en $x = 0$, il faut utiliser la valeur du nombre dérivé (qui donne la pente de la tangente à la courbe). Si vous ne l'aviez pas déjà obtenue à l'exemple du chapitre précédent, exprimer la dérivée $f'(x)$ en fonction de E et r et l'exprimer en $x = 0$. Montrer qu'on obtient : $f'(0) = \dfrac{E^2}{r^2}$.
Ainsi, la pente de la tangente à l'origine n'est pas nulle, et la courbe "démarre" de $x = 0$ par une tangente oblique (de pente positive). En déduire finalement l'allure complète du graphe de $f(x)$.

Synthèse de cours

• On cherche souvent à obtenir le comportement d'une fonction en $\pm\infty$ et/ou autour de valeurs auxquelles la fonction n'est pas définie.

$\hookrightarrow$ Pour ce faire, on commence par chercher les limites aux points correspondants.

$\hookrightarrow$ Quand le calcul de ces limites correspond à des valeurs indéterminées, on peut tenter de conserver, dans les produits/quotients les termes dominants uniquement, et voir comment les expressions se simplifient.

Par exemple, dans l'exemple précédent, en $+\infty$, c'est-à-dire pour $x \gg r$, le terme au dénominateur devient : $(r+x)^2 \simeq x^2$ et ainsi on a : $f(x) \simeq \dfrac{x}{x^2}\,E^2 \simeq \dfrac{E^2}{x} \longrightarrow 0$.

• Sans tracer un tableau de variation complet d'une fonction donnée, on peut être capable de tracer l'allure de son graphe :

$\hookrightarrow$ en plaçant certains points particuliers (valeur à l'origine, entre autres)

$\hookrightarrow$ en plaçant les asymptotes correspondant aux limites (en $\pm\infty$)

$\hookrightarrow$ en indiquant les extrémums (tangente horizontale en ces points)

$\hookrightarrow$ en calculant le nombre dérivé en quelques points particuliers, notamment à l'origine, pour voir comment la fonction "démarre" en ce point. On rappelle en effet que la valeur du nombre dérivé en un point donne la pente de la tangent en ce point.

Ex. 1 - Lois de forces (* puis **)

1 - La force d'interaction gravitationnelle exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 s'exprime comme : $f(x) = -\dfrac{G\,m_1\,m_2}{x^2}$ où x est la distance séparant les deux masses ($x > 0$, forcément), et G la constante universelle de la gravitation.

1.1 - Chercher les limites de la fonction f en $x \longrightarrow 0$ et en $x \longrightarrow +\infty$.

1.2 - Tracer rapidement l'allure du graphe de cette fonction.

2 - Si on considère deux grosses molécules proches l'une de l'autre dans un solvant, l'énergie de chacune des molécules s'écrit : $E(d) = +\dfrac{\beta}{d^{12}} - \dfrac{\alpha}{d^6}$ où α et β sont des constantes positives, et d la distance qui sépare les deux molécules ($d > 0$).

2.1 - Chercher les limites en $d \longrightarrow 0$ et en $d \longrightarrow +\infty$ de cette fonction.

2.2 - Existe-t-il un point où cette énergie est extrémale ? Si oui, donner l'expression de d_0 correspondant à cet extrémum. Au vu des limites calculées précédemment, cet unique extrémum est-il, à votre avis, un maximum ou un minimum ?

2.3 - Tracer, globalement, l'allure de la fonction $E(d)$, en indiquant le point correspondant à l'extrémum.

Ex. 2 - Décharge et charge d'un condensateur (* puis **)

Dans un circuit électrique contenant un condensateur et une résistance, le condensateur, initialement chargé, peut se décharger au cours du temps. La tension à ses bornes évolue alors selon la loi : $u(t) = U_0\,e^{-t/\tau}$ où U_0 et τ sont des constantes positives (et t désigne le temps, $t > 0$ uniquement).

1 - Exprimer la valeur de $u(t)$ en $t = 0$ et chercher sa limite en $t \longrightarrow +\infty$.

2 - Exprimer la dérivée de u par rapport au temps, et la calculer en $t = 0$.

3 - En déduire une allure du graphe de la fonction $u(t)$. On fera particulièrement attention à son allure en $t = 0$.

Si au contraire on charge le condensateur à l'aide d'un générateur, la tension à ses bornes évolue selon la loi : $u(t) = U_0\,(1 - e^{-t/\tau})$ (où comme précédemment, U_0 et τ sont des constantes positives, et t désigne le temps, $t > 0$).

4 - Exprimer la valeur de $u(t)$ en $t = 0$ et chercher sa limite en $t \longrightarrow +\infty$.

5 - Comment s'exprime la dérivée de u par rapport au temps? Comment s'exprimer cette dérivée en $t = 0$?

6 - En déduire une allure du graphe de la fonction $u(t)$. On fera particulièrement attention à son allure en $t = 0$.

7 Corrigés

7.1 Manipulations de fractions et d'équations simples

Exemple introductif

1 - $\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}=\dfrac{R_1+R_2}{R_1\,R_2}$ **2 -** On inverse la fraction et on obtient : $R=\dfrac{R_1\,R_2}{R_1+R_2}$

3 - On obtient :

R (en Ω)	50	67	75	100	167	182	190

4 - On constate que la valeur de R est toujours inférieure à la plus petite des valeurs de R_1 et R_2.

5 - Quand $R_1=R_2$, on constate dans le tableau que $R=R_1/2=R_2/2$.

On peut l'obtenir d'après l'expression du **2** : $R=\dfrac{R_1\,R_1}{R_1+R_1}=\dfrac{R_1}{2}$

Ex. 1 - Equations archi-simples

(1) : $x=\dfrac{c-b}{a}$ (2) : $x=\dfrac{a}{c}-b=\dfrac{a-b\,c}{c}$ (3) : $a\,x^2+b\,x-c=0\ \Rightarrow\ x=-b\pm\dfrac{1}{2\,a}\sqrt{b^2+4\,a\,c}$

Ex. 2 - Loi des mailles dans un circuit électrique

1 - $U=E-U'\ \Rightarrow\ U=8,0\,\mathrm{V}$

2.1 - $I=\dfrac{U}{R}\ \Rightarrow\ I=0,08\,\mathrm{A}$ soit 80 mA **2.2 -** $I=\dfrac{E-U'}{R}$ (on obtient la même valeur numérique)

3.1 - $R'=\dfrac{U'}{I}\ \Rightarrow\ R'=\dfrac{2}{0,08}=25\,\Omega$

3.2 - $E=U+U'=R\,I+R'\,I=(R+R')\,I\ \Rightarrow\ I=\dfrac{E}{R+R'}$ (expression proposée)

3.3 - On obtient ici : $I=\dfrac{10}{125}=0,08\,\mathrm{A}$ comme précédemment

Ex. 3 - Relation des Descartes

1 - Là encore il faut mettre les fractions au même dénominateur : $\dfrac{1}{x'}=\dfrac{1}{f'}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-f'}{x\,f'}\ \Rightarrow\ \boxed{x'=\dfrac{x\,f'}{x-f'}}$

2 - A.N. : $x'=600\,\mathrm{mm}$ (attention à mettre x et f' dans la même unité !

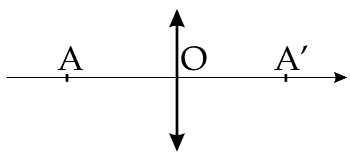
3 - En divisant le numérateur et le dénominateur par x on obtient la formule proposée.

Si $x\nearrow$, alors $\dfrac{f'}{x}\searrow$, alors $-\dfrac{f'}{x}\nearrow$ et $\dfrac{f'}{1-\frac{f'}{x}}\searrow$: donc <u>si $x\nearrow$, $x'\searrow$</u>

(l'image se rapproche de la lentille si on éloigne l'objet).

4.1 - $x=\dfrac{x\,f'}{x-f'}\ \Rightarrow\ x\,(x-f')=x\,f'\ \Rightarrow\ x-f'=f'\ \Rightarrow\ x=0$ (impossible) ou $\boxed{x=2\,f'}$

4.2 - On peut décomposer : $AA'=AO+OA'=x+x'=2\,f'+2\,f'=\boxed{4\,f'}$



7.2 Manipulations de fonctions : dérivation, intégration

Exemple introductif

1 - $f'(x)=-a\,e^{-x}$ **2 -** $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x=-a\,e^{-x}$ (+cste)

Ex. 1 - Décroissance exponentielle encore

1 - $u(t=0)=U_0$ (car $\exp(0)=1$) et U_0 est la tension initiale

2 - $u'(t)=-\dfrac{U_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}$ **3 -** $U(t)=\displaystyle\int u(t)\,\mathrm{d}t=-\tau\,U_0\,e^{-t/\tau}$ (+cste)

Ex. 2 - Lois de force

1.1 - $f'(x) = +\dfrac{G\,m_1\,m_2}{x^3}$ **1.2 -** $E(x) = -\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = -\dfrac{G\,m_1\,m_2}{x}$ (+cste)

2 - $E(x) = -\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\,k\,x^2$ (+cste)

3.1 - $f(d) = -E'(d) = -\dfrac{6\,\alpha}{d^7}$ **3.2 -** $f(d) = -E'(d) = -\dfrac{4\,\beta}{d^5} - \dfrac{6\,\alpha}{d^7}$

Ex. 3 - Fonction de transfert d'un filtre passe-bas ou passe-haut

1 - $f'(x) = -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\,x}{(1+x^2)^{3/2}}$ $g'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - x\,\dfrac{2\,x}{2\,\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$

2 - Avec $x \geq 0$, on aura donc $f'(x) < 0$ (donc f est décroissante) et $g'(x) > 0$ (donc g est croissante).

7.3 Etude des fonctions sinusoïdales

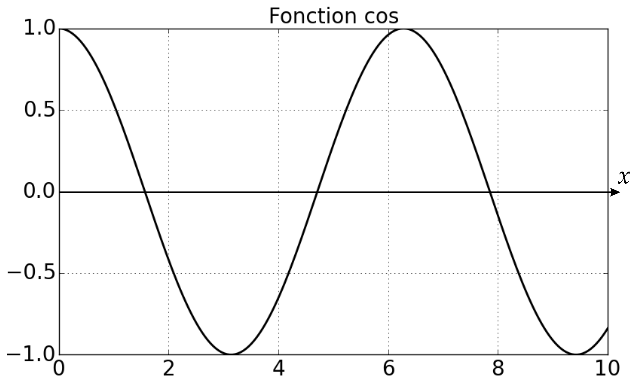
Exemple introductif

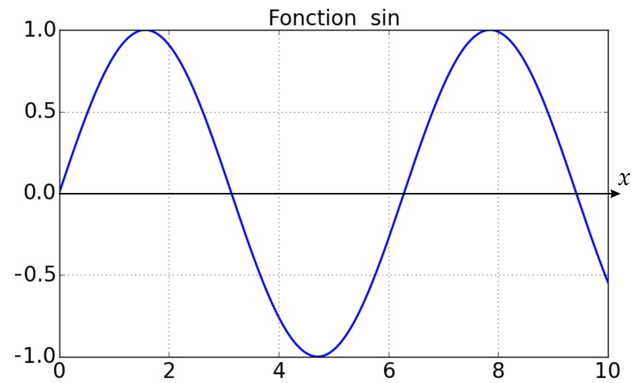
1 - Ici la fonction $f(x) = A\,\cos(x)$ a été représentée avec $A = 1$.

2 - f est max pour $x = 0; 2\,\pi; 4\,\pi; \ldots$ c-à-d pour $x = 2\,n\,\pi, (n \in \mathbb{Z})$: ces max valent $+A$.
f est min pour $x = \pi; 3\,\pi; 5\,\pi; \ldots$ c-à-d pour $x = (2\,n+1)\,\pi, (n \in \mathbb{Z})$: ces min valent $-A$.

3 - f est nulle pour $x = \pi/2; 3\,\pi/2; 5\,\pi/2; \ldots$ c-à-d pour $x = (n + \dfrac{1}{2})\,\pi, (n \in \mathbb{Z})$

4 - Pour $g(x) = B\,\sin(x)$:
g est max pour $x = \pi/2; 5\,\pi/2; 9\,\pi/2; \ldots$ c-à-d pour $x = (2\,n + \dfrac{1}{2})\,\pi, (n \in \mathbb{Z})$: ces max valent $+B$.
g est min pour $x = 3\,\pi/2; 7\,\pi/2; 11\,\pi/2; \ldots$ c-à-d pour $x = (2\,n + 1 + \dfrac{1}{2})\,\pi, (n \in \mathbb{Z})$: ces min valent $-B$.
g est nulle pour $x = 0; \pi; 2\,\pi; \ldots$ c-à-d pour $x = n\,\pi, (n \in \mathbb{Z})$

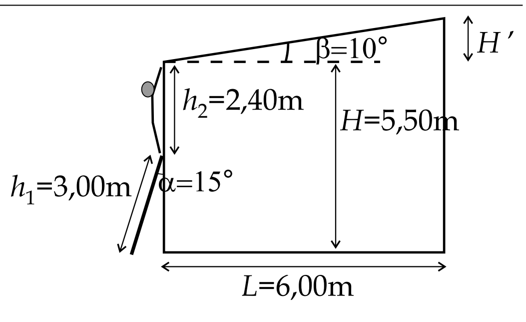




Ex. 1 - Kylian et son ballon

1 - Hauteur totale : échelle projetée sur la verticale + Kylian bras levé : $h = h_1\,\cos(\alpha) + h_2$
A.N. : $h = 3,00\,.\,\cos(15) + 2,40 = 5,30\,\text{m} < H = 5,50\,\text{m}$
Il lui manque donc 0,20 m pour atteindre le ballon dans la gouttière, situé à 5,50 m.

2 - Il monte d'une hauteur totale : $H + H' = H + L\,\tan\beta$
A.N. : $H + H' = 5,50 + 6,00\,.\,\tan(10) \simeq 6,60\,\text{m}$



Ex. 2 - Signaux temporels sinusoïdaux

1 - Le signal est max pour $\omega\,t = 0; 2\,\pi; 4\,\pi; \ldots$

Ainsi, la première valeur de $t > 0$ tq le signal est max est $t_1 = \boxed{\dfrac{2\,\pi}{\omega} = T}$

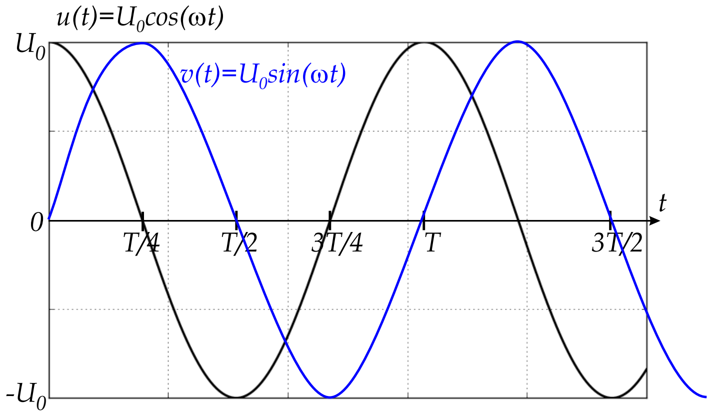
2 - Pour $t = T/4$, on a : $\omega\, t = \omega\, \dfrac{2\,\pi}{4\,\omega} = \dfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; u(t) = 0$

Pour $t = T/2$: $\omega\, t = \omega\, \dfrac{2\,\pi}{2\,\omega} = \pi \;\Rightarrow\; u(t) = -U_0$

Pour $t = 3\,T/4$: $\omega\, t = \omega\, \dfrac{3\times 2\,\pi}{4\,\omega} = \dfrac{3\,\pi}{2} \;\Rightarrow\; u(t) = 0$

Pour $t = 3\,T/2$: $\omega\, t = \omega\, \dfrac{3\times 2\,\pi}{2\,\omega} = 3\,\pi \;\Rightarrow\; u(t) = -U_0$

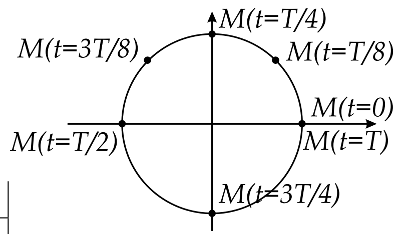
Pour $t = 2\,T$: $\omega\, t = \omega\, \dfrac{2\times 2\,\pi}{\omega} = 4\,\pi \;\Rightarrow\; u(t) = +U_0$



3 & 4 - Courbes pour $u(t)$ et $v(t)$: ci-contre

5 - Quand l'une des 2 est nulle, l'autre est maximale ou minimale. On dit que ces deux fonctions sont en quadrature de phase l'une par rapport à l'autre.

6 - Quand $t \nearrow$, le point M décrit un cercle (le cercle trigonométrique); il met un temps T à faire un tour :

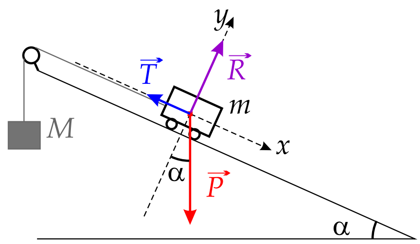


	$t=0$	$t=T/8$	$t=T/4$
x	$\cos(0)=1$	$\cos(\pi/4)=1/\sqrt{2}$	$\cos(\pi/2)=0$
y	$\sin(0)=0$	$\sin(\pi/4)=1/\sqrt{2}$	$\sin(\pi/2)=1$

	$t=3\,T/8$	$t=T/2$	$t=3\,T/4$	$t=T$
x	$\cos(3\,\pi/4)=-1/\sqrt{2}$	$\cos(\pi)=-1$	$\cos(3\,\pi/2)=0$	$\cos(2\,\pi)=1$
y	$\sin(\pi/4)=1/\sqrt{2}$	$\sin(\pi)=0$	$\sin(3\,\pi/2)=-1$	$\sin(2\,\pi)=0$

Ex. 3 - Equilibre de forces

1 - Schéma des forces ci-contre :



2 - Projections des forces sur (Ox, Oy) : $\vec{T} = \begin{pmatrix} -M\,g \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ +R \end{pmatrix}$

$\vec{P} = \begin{pmatrix} +m\,g\,\sin\alpha \\ -m\,g\,\cos\alpha \end{pmatrix}$

3 - PFS projeté selon (Ox) : $-M\,g + 0 + m\,g\,\sin\alpha = 0$
et selon (Oy) : $0 + R - m\,g\,\cos\alpha = 0$

De la deuxième équation on tire : $\boxed{R = m\,g\,\cos\alpha}$

4 - De la première équation, on tire : $M = m\,\sin\alpha \;\Rightarrow\; \boxed{m = \dfrac{M}{\sin\alpha}}$ A.N. : $m = 100\,\mathrm{kg}$

7.4 Résolution d'un système de 2 ou 3 équations à 2 ou 3 inconnues

Exemple introductif

1 - En remplaçant i_4 et i_5 par i_3 on obtient : $\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3 & (E1) \\ i_2 = i_3 + i_3 = 2\,i_3 & (E2) \end{cases}$

2 - $(E1) \;\Rightarrow\; i_1 = i_3 + 2\,i_3 = 3\,i_3 \;\Rightarrow\; \boxed{i_3 = \dfrac{i_1}{3}}$ A.N. : $i_3 = 0,33\,\mathrm{A}$

3 - Finalement : $\boxed{i_2 = 2\,i_3 = \dfrac{2}{3}\,i_1}$ A.N. : $i_2 = 0,67\,\mathrm{A}$

4 - Et par ailleurs $i_4 = i_5 = i_3 = \dfrac{i_1}{3} = 0,33\,\mathrm{A}$

Ex. 1 - Forces sur un palet

1 - $(E1) \;\Rightarrow\; \boxed{R_N = m\,g\,\cos\alpha}$ et $(E2) \;\Rightarrow\; \boxed{R_T = m\,g\,\sin\alpha}$

2 - Condition de non-glissement du palet : $m\,g\,\sin\alpha < f\,m\,g\,\cos\alpha \;\Leftrightarrow\; \boxed{\tan\alpha < f}$

3 - $\tan(10) = 0,18$ donc on a bien $\tan(10) < f = 0,25$: palet immobile sur une pente à 10°;
mais $\tan(20) = 0,36 > 0,25$: sur une pente à 20°le palet se met à glisser

Ex. 2 - Etude d'un circuit

1 - $(E3) \ \Rightarrow\ U = U_1 + U_2 = E$ **2 -** $(E2)\ :\ E = R_1\, i_1 + R_2\, i_1 = (R_1 + R_2)\, i_1$ et $(E3')\ :\ E = R\, i$

3 - D'où : $\boxed{i_1 = \dfrac{E}{R_1 + R_2}}$ **4 -** De même : $\boxed{i = \dfrac{E}{R}}$

5 - $(E1)\ :\ i_0 = \dfrac{E}{R_1 + R_2} + \dfrac{E}{R} \ \Rightarrow\ \boxed{i_0 = \dfrac{R + R_1 + R_2}{R\,(R_1 + R_2)}\, E}$

7.5 Recherche de l'extrémum d'une fonction

Exemple introductif

1 - Pour trouver le point auquel f admet un extrémum, il faut calculer sa dérivée et chercher en quel point elle s'annule :
$f'(x) = \dfrac{(r+x)^2 - x\,.\,2\,(r+x)}{(r+x)^4}\, E^2 = \dfrac{r - x}{(r+x)^3}\, E^2$ et on doit chercher s'il existe un x pour lequel $f'(x) = 0$

2 - $\boxed{f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = r}$

3 - $f(x = r) = \dfrac{r}{(2\,r)^2}\, E^2 = \dfrac{E^2}{4\,r}$

Ex. 1 - Trajectoire parabolique

1 - On calcule $y'(x) = -\dfrac{g}{2\,v_0^2\,\cos^2\alpha}\, 2\,x + \tan\alpha$ et on cherche x tel que : $y'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \dfrac{v_0^2\,\cos\alpha\,\sin\alpha}{g}$

2 - Altitude maximale : $\boxed{y_{\max} = y(x_{\max}) = \dfrac{v_0^2\,\sin^2\alpha}{2\,g}}$

3 - A v_0 donnée, $y_{\max}$ est max si $\sin^2\alpha$ est max c-à-d si $\boxed{\alpha = \pi/2}$ et alors : $\boxed{y_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2\,g}}$

Ex. 2 - Distance minimale entre un objet et une image

1 - $AA' = g(x) = x + \dfrac{x\,f'}{x - f'} = \dfrac{x^2}{x - f'}$

2 - g admet un extrémum si $g'(x) = 0$ où $g'(x) = \dfrac{x\,(x - 2\,f'}{(x - f')^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$ (pas envisageable) ou $\boxed{x = 2\,f'}$

3 - Alors on aura : $g(x) = 2\,f' + \dfrac{2\,f'^2}{2\,f' - f'} = \boxed{4\,f'}$
(l'objet et l'image sont alors à la même distance $(2\,f')$, de part et d'autre de la lentille)

Ex. 3 - Maximum de la réponse en tension dans un circuit

A - Premier circuit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$ où $g(x) = 1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$

1 - $g'(x) = 2\,Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x - \dfrac{1}{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 = 1 \ \Leftrightarrow\ \boxed{x = 1}$ (car $x > 0$)
(En cette valeur, la fonction g est bien minimale car $g(x)$ est toujours positive, et tend vers $+\infty$ en $x \to 0$ et en $x \to +\infty$)

2 - On a alors : $f(x = 1) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 0}} = 1$ valeur indépendante du facteur de qualité Q du circuit

B - Second circuit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{g(x)}}$ où $g(x) = (1 - x^2)^2 + \dfrac{x^2}{Q^2}$

3 - $g'(x) = 2\,(1 - x^2)\,(-2\,x) + \dfrac{2\,x}{Q^2} = 4\,x\left(\dfrac{1}{2\,Q^2} - 1 + x^2\right)$ donc $g'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 = 1 - \dfrac{1}{2\,Q^2}$

cela n'est possible que si $1 - \dfrac{1}{2\,Q^2} > 0 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{2\,Q^2} < 1 \;\Leftrightarrow\; \boxed{Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ (condition proposée)

4 - Alors on aura : $\boxed{x = \sqrt{1 - \dfrac{1}{2\,Q^2}}}$ (Là encore, en cette valeur, g est bien minimale, car cette fonction est toujours positive, avec $g(x=0) = 1$ et $g \to +\infty$ en $x \to +\infty$)

Et on aura : $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{4\,Q^4} + \dfrac{1}{Q^2}\left(1 - \dfrac{1}{2\,Q^2}\right)}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4\,Q^4}}}$ (valeur dépendant du facteur de qualité Q).

7.6 Recherche de limites et tracé de graphes

Exemple introductif

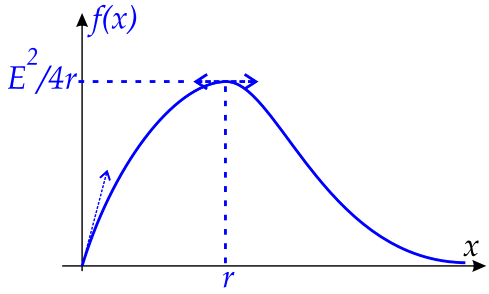
1 - $f(x=0) = 0$

2 - En $x \longrightarrow +\infty$, le terme dominant au dénominateur est x^2 et on a alors : $f(x) \simeq \dfrac{x}{x^2}\,E^2 \simeq \dfrac{E^2}{x} \longrightarrow 0$

3 - Pour $x > 0$, $f(x) > 0$.

4 - Graphe ci-contre

5 - $f'(x=0) = \dfrac{r-0}{(r+0)^3}\,E^2 = \dfrac{E^2}{r^2} > 0$
donc la tangente à l'origine a une pente strictement positive.



Ex. 1 - Lois de forces

1.1 - En $x \longrightarrow 0$, $f \longrightarrow -\infty$
et en $x \longrightarrow +\infty$, $f \longrightarrow 0$

1.2 - Graphe ci-contre

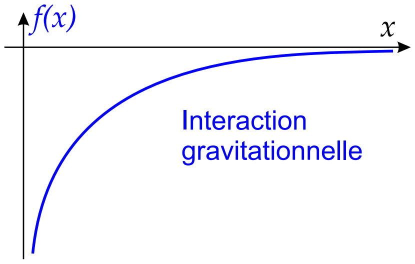
2.1 - En $d \longrightarrow 0$, $f \longrightarrow +\infty$ (car c'est le terme en $1/d^{12}$ qui l'emporte), et en $x \longrightarrow +\infty$, $f \longrightarrow 0$

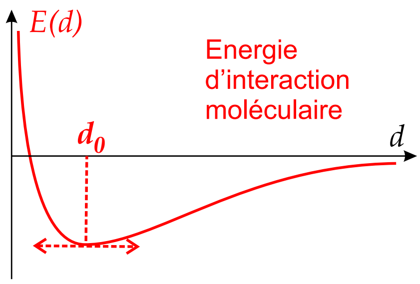
2.2 - $E'(d) = -12\,\dfrac{\beta}{d^{13}} + 6\,\dfrac{\alpha}{d^7}$: on cherche s'il existe d tel que $E'(d) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{{d_0}^6 = 2\,\dfrac{\beta}{\alpha}}$ (ou : $d_0 = \left(2\,\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{1/6}$)

Cet extrémum est un minimum, puisque $E \longrightarrow +\infty$ en $x \longrightarrow 0$.

2.3 - Graphe ci-contre!





Ex. 2 - Décharge et charge d'un condensateur

1 - Décharge : $u(t=0) = U_0$ (tension initiale)
et en $t \longrightarrow +\infty$, $u(t) \longrightarrow 0$

2 - $u'(t) = -\dfrac{U_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}$ donc en $t = 0$, : $u'(t=0) = -\dfrac{U_0}{\tau}$
(< 0 : pente de la tangente à l'origine négative)

3 - Graphe ci-contre

4 - Charge : $u(t=0) = U_0\,(1-1) = 0$
et en $t \longrightarrow +\infty$, $u(t) \longrightarrow U_0$

5 - $u'(t) = +\dfrac{U_0}{\tau}\,e^{-t/\tau}$ donc en $t = 0$, : $u'(t=0) = +\dfrac{U_0}{\tau}$
(> 0 : pente de la tangente à l'origine positive)

6 - Graphe ci-contre